

Вопросы итоговой контрольной работы по предмету Математический анализ для студентов 2-курса по направлению математика

Теоритические вопросы

1. Формула Тейлора для функций многих переменных.
2. Экстремумы функций многих переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума.
3. Неявные функции. Существование.
4. Непрерывность и дифференцируемость неявных функции.
5. Числовой ряд. Сходимость и расходимость числовых рядов.
6. Числовой ряд. Свойства сходящихся рядов.
7. Положительный ряд и признаки их сходимости.
8. Числовой ряд с произвольными членами и признаки сходимости Лейбница, Дирихле и Абеля для этих рядов.
9. Абсолютно сходящийся ряд и их свойства.
10. Условно сходящийся ряд. Теорема Римана.
11. Равномерная сходимость функциональных последовательностей (рядов), критерий Коши.
12. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей (рядов) (признаки Абеля).
13. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей (рядов) (признаки Вейерштрасса).
14. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей (рядов) (признаки Дирихле и Дини).
15. Функциональные свойства функциональных последовательностей (рядов) (предельный переход, непрерывность суммы ряда).
16. Функциональные свойства функциональных последовательностей (рядов) (почленное интегрирование и дифференцирование).
17. Степенные ряды. Радиус и область сходимости степенных рядов.
18. Степенные ряды. Формула Коши-Адамара.
19. Функциональные свойства степенных рядов.
20. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
21. Функциональные свойства собственных интегралов, зависящих от параметров.
22. Собственные интегралы, зависящие от параметров (общий случай).

23. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметров.

24. Функциональные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметров.

Примеры

1. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$

2. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

3. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

4. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

5. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$

6. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$

7. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

8. Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать

сходимость рядов: $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$

9. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

10. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n+1}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$

11. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$

12. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$

13. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$

14. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{\pi}{4}$

15. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их

суммы: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{2^n}$

16. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$

17. Функцию $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, -2)$ ($n = 3$).

18. Функцию $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(0, 0)$ ($n = 2$).

19. Функцию $f(x, y) = e^x \sin y$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(0, 0)$ ($n = 3$).

20. Функцию $f(x, y) = y^x$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1)$ ($n = 2$).

21. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

22. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$

23. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$

24. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

25. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

26. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$

27. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных: $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

28. Определить наибольшие (sup) и наименьшие (inf) значение следующих функций в указанных областях:

$$f(x, y) = x - 2y - 3. \quad D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$$

29. Определить наибольшие (sup) и наименьшие (inf) значение следующих функций в указанных областях:

$$f(x, y) = 1 + x + 2y. \quad D = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

30. Определить наибольшие (sup) и наименьшие (inf) значение следующих функций в указанных областях:

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4. \quad D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

31. Определить наибольшие (sup) и наименьшие (inf) значение следующих функций в указанных областях:

$$f(x, y) = x^2 - y^2. \quad D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

32. Найти y' и y'' для функций y , определяемых следующими уравнениями:

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2$$

33. Найти y' и y'' для функций y , определяемых следующими уравнениями:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

34. Найти y' и y'' для функций y , определяемых следующими уравнениями:

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

35. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E : $f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}$, $E = [0; 1]$

36. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на

множестве E : $f_n(x) = x^4 \cos \frac{1}{nx}$, $E = (0; \infty)$

37. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $E: f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x^n, \quad E = (0; \infty)$

38. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $E: f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad E = \mathbb{R}$

39. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве $E: f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad E = [1; \infty]$

40. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве $E: f_n(x) = x^{2n}, \quad E = [0; \delta], 0 < \delta < 1.$

41. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве $E: f_n(x) = \sqrt{n} \sin \frac{x}{n\sqrt{n}}, \quad E = \mathbb{R}$

42. Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$

43. Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$

44. Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sqrt{\sin^n x}$

45. Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}$

46. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi x}{n}$$

47. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$

48. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

49. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

50. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, \quad -2 < x < +\infty.$$

51. Найти радиус сходимости R степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

52. Найти радиус сходимости R степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+1)^n$

53. Найти радиус сходимости R степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$

54. Найти радиус и интервал сходимости R степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n} (x-1)^n$

55. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

56. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

57. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$

58. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

59. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

60. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^3}$

61. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} n! (x-4)^n$

62. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

63. Исследовать на равномерную сходимость $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

64. Исследовать на равномерную сходимость $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$

65. Разложить функцию в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда: e^{-x^2}

66. Разложить функцию в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда: $\frac{x^2}{(1+x)^2}$

67. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $x_0 = 1$.

68. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда: $\sin^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

69. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда: $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}$, $x_0 = 6$.

70. Найти предел: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha} dx$

71. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}}{\ln x} dx$, $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$.

72. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$

73. Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на R , если: $I(\alpha) = \int_0^1 \sin^2 \alpha x^2 dx$

74. Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на R , если: $I(\alpha) = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{1 + x^2 + \alpha^2 x^4} dx$

75. Найти предел: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2 x^4} dx$

76. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha) = \int_0^1 \sin(\alpha x) dx$